中級ミクロ経済学 II（再履修）　第 3 回授業内課題

問題作成者：北村　友宏

2018 年 6 月 20 日

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

※解法が分からなければ，空白のまま提出しようとせず，担当教員に質問してください．

1. 生産要素を 2 種類用いて財を 1 種類生産する企業を考える．生産関数は

$$f(x_1, x_2) = 4\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$$

である．また，要素価格ベクトルは，$(w_1, w_2) = (2, 3)$ である．財を y 単位生産するのに必要な最小費用を求め，この企業の費用関数 $C(y)$ および限界費用関数 $MC(y)$ を導出したい．このとき，以下の問いに答えなさい．

（a）財を y 単位生産する場合の費用最小化問題を書きなさい．

（b）要素 1 と要素 2 の限界生産物 MP_1 と MP_2 を求めなさい．

（c）生産要素の最適投入量においては技術的代替率 TRS と「要素価格比にマイナスをつけたもの」が等しいという接線条件を利用し，最適投入量における要素 2 の投入量 x_2 を要素 1 の投入量 x_1 の式で表しなさい．

（d）（c）で導出した式を等量曲線の式（費用最小化問題の制約条件式）に代入することにより，最適な要素 1 の投入量を y の式で表しなさい．

（e）最適な要素 2 の投入量を y の式で表しなさい．

（f）（d）と（e）で求めた最適投入量を，費用の定義（費用最小化問題の目的関数）に代入したものを費用関数 $C(y)$ とする．$C(y)$ を求めなさい．

（g）限界費用関数 $MC(y)$ を求めなさい．

授業内課題解答

解答作成者：北村　友宏

※答案には重要な計算過程を示していればよい．ここまで詳しく説明する必要はない．

1.（a）費用最小化問題は，

$$\min_{x_1,x_2} 2x_1 + 3x_2,$$
$$\text{s.t. } \underbrace{4\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}}_{=f(x_1,x_2)} = y.$$

（b）要素 1 の限界生産物は，

$$MP_1 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 4 \cdot \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} = 2x_1^{-\frac{1}{2}}.$$

要素 2 の限界生産物は，

$$MP_2 = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} x_2^{-\frac{1}{2}} = x_2^{-\frac{1}{2}}.$$

（c）接線条件より，

$$\begin{aligned}
\underbrace{-\frac{MP_1}{MP_2}}_{\text{技術的代替率 } TRS} = \underbrace{-\frac{w_1}{w_2}}_{\text{要素価格比}} &\Leftrightarrow -\frac{2x_1^{-\frac{1}{2}}}{x_2^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3} \\
&\Leftrightarrow \frac{2x_1^{-\frac{1}{2}}}{x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} && \text{両辺 } \times(-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{x_1^{-\frac{1}{2}}}{x_2^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3} && \text{両辺 } \div 2 \\
&\Leftrightarrow x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} && \text{左辺の分母と分子 } \times x_2^{\frac{1}{2}} \\
&\Leftrightarrow x_1^{-1} x_2 = \frac{1}{9} && \text{両辺 2 乗} \\
&\Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{9} x_1. && \text{両辺 } \times x_1 \qquad (1)
\end{aligned}$$

（d）(1) を等量曲線の式に代入すると，

$$
\begin{aligned}
4\sqrt{x_1} + 2\sqrt{\frac{1}{9}x_1} = y &\Leftrightarrow 4\sqrt{x_1} + 2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{x_1} = y \\
&\Leftrightarrow 4\sqrt{x_1} + \frac{2}{3}\sqrt{x_1} = y \\
&\Leftrightarrow \left(4 + \frac{2}{3}\right)\sqrt{x_1} = y \\
&\Leftrightarrow \frac{12+2}{3}\sqrt{x_1} = y \\
&\Leftrightarrow \frac{14}{3}\sqrt{x_1} = y \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \frac{3}{14}y \\
&\Leftrightarrow x_1 = \frac{9}{196}y^2.
\end{aligned}
$$

よって，要素 1 の最適投入量は，

$$x_1 = \frac{9}{196}y^2.$$

（e）要素 1 の最適投入量を (1) に代入すると，要素 2 の最適投入量は，

$$x_2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{196}y^2 = \frac{1}{196}y^2.$$

（f）要素 1 と要素 2 の最適投入量を費用の定義に代入すると，

$$2 \cdot \frac{9}{196}y^2 + 3 \cdot \frac{1}{196}y^2 = \frac{18+3}{196}y^2 = \frac{21}{196}y^2 = \frac{3}{28}y^2.$$

よって，費用関数は，

$$C(y) = \frac{3}{28}y^2.$$

（g）（e）で求めた費用関数を y で微分すると，

$$MC(y) = \frac{dC(y)}{dy} = \frac{3}{28} \cdot 2y = \frac{3}{14}y.$$

よって，限界費用関数は，

$$MC(y) = \frac{3}{14}y.$$